岡山大学経済学会雑誌17(3・4), 1986, 87〜107

動学的ティンバーゲン定理について*

藤　本　利　躬

I　序

経済政策の理論はティンバーゲンのモデルに始まるとターノフスキーをしていわしめたものは，政策手段数に関するいわゆるティンバーゲンの定理にほかならない（[14] p.372）。しかし，それはカルバートソンが「均衡値のみに拘泥し，動学分析といかにかかわるのか全く不明」の静学的フレームワークと批判するところのものでもある（[3] p.394）。したがってティンバーゲン定理の動学化こそは経済政策の理論の動学化にとって必要不可欠であるが，その嚆矢となったのはプレストン [11] である。(1) 本稿の課題は，このパイオニア的モデルとその発展としてのプレストン&シーパー [12] をそれぞれ手段の「のべ数」に関するティンバーゲン定理の短期動学版，長期動学版と規定し関連づけて，オリジナルとしての静学定理からの直系関係を明らかにすることである。

なお，プレストンの分析手法は線型システム制御論における状態空間法である。このような現代制御論の方法の経済政策分析への応用はいまやたけなわの観があるが，一方で合理的期待形成論の立場からのキュリー [4] に代表されるような批判もある。本稿の——課題ではないが——主題は，このように賛否

---

* 本稿執筆中に岡山大学経済学部の梶原宏之氏からいただいた有益なコメントに感謝したい。なお残る誤謬がすべて筆者の責任に帰することは無論である。

(1) 規模の大小とりまぜて数ある既存の計量経済モデルは，もちろん，おしなべて動学的であるが，いわゆる政策シミュレーション・モデルの枠を超えるものではない。

両論かまびすしい状態空間法の応用について，その必然性がいかなる分析局面でいかにして生じているかを垣間見て，アマチュアとして持つ好奇心を充たすことである。

II　静学的可制御命題：いわゆるティンバーゲン定理

一般に，経済分析で用いられる理論モデルは経済学の意味内容を数学的に表現したものであり，具体的には経済現象（変数）間の相互依存か因果連関を表わす一連の方程式から構成された整合的な連立方程式にほかならず，通常，経済システムの構造モデルとかモデルの構造型とよばれている。これを線型モデル

$$(1)\quad M_{(1)}\xi_{(1)}+M_{(2)}\xi_{(2)}=0$$

で表わすことにする。ここに $\xi_{(1)}$, $\xi_{(2)}$ はそれぞれ内生変数，外生変数のベクトルであり，$M_{(1)}$, $M_{(2)}$ は $\xi_{(1)}$, $\xi_{(2)}$ にかかる適当なサイズの構造パラメータの行列である。当然，モデルは整合的であるべきだから，$M_{(1)}$ は正則，すなわち

$$(2)\quad |M_{(1)}|\neq 0$$

でなければならない。

固定目標（fixed target）の定量的経済政策モデル（model of quantitative economic policy）とよばれるティンバーゲンのフレームワークは(1)において内生変数 $\xi_{(1)}$ を目標変数（target）X と非目標内生変数 $\bar{X}$ に，また外生変数 $\xi_{(2)}$ を政策手段（instrument）U と与件変数 W に，それぞれ分割し，それに対応して構造係数行列も $M_{(1)}=[M_X,\ M_{\bar{X}}]$, $M_{(2)}=[M_U,\ M_W]$ と，それぞれ X, $\bar{X}$, U, W の次数に整合するように行列分割した

$$(3)\quad M_XX+M_{\bar{X}}\bar{X}+M_UU+M_WW=0,\quad |M_X,\ M_{\bar{X}}|\neq 0$$

にほかならない。

ところで，国民所得や雇用水準などのような政策目標を表わす目標変数とこれら目標の達成を意図して当局が自在に操作・制御することのできる（ものとしての，たとえば財政支出や貨幣供給などの）自由裁量政策手段をモデルに含める必要は自明であり，また人口や世界貿易などのように当局が制御できない純外生変数としての与件（datum）も，それが経済システムに対する不可避な「負荷」（[6] p. 293），つまり制約条件をなす限りにおいてモデルから消去することは論理的に不可能であるが，ティンバーゲンが局外変数（irrelevant variable）と名付けた非目標内生変数は，それがどのようになろうとも当局の関心外にある局面を表わすから，モデルから消去しても，少なくとも原理的には支障がないわけである。そしてプレストン [11][12] を初めとしてすべての動学的固定目標政策モデルがとる形式もこれである。

局外変数の消去は，たとえば次のように行うことができる。(2)により $M_{(1)}$ は正方行列であるから，その分割である $M_{\bar{X}}$ は行数＞列数の行列であり，したがって(3)から $M_{\bar{X}}$ の列数に等しい数の方程式を適当に選んで部分システム

$$(4)\quad M_X^{(1)}X+M_{\bar{X}}^{(1)}\bar{X}+M_U^{(1)}U+M_W^{(1)}W=0,\quad |M_{\bar{X}}^{(1)}|\neq 0$$

を組みあげることができる。これより得られる

$$(5)\quad \bar{X}=-M_{\bar{X}}^{(1)-1}(M_X^{(1)}X+M_U^{(1)}U+M_W^{(1)}W)$$

を(3)の(4)に関する補集合システム

$$(6)\quad M_X^{(2)}X+M_{\bar{X}}^{(2)}\bar{X}+M_U^{(2)}U+M_W^{(2)}W=0,\quad |M_X^{(2)}|\neq 0$$

へ代入すれば，最終的に

$$(7)\quad AX+BU+CW=0,\quad |A|\neq 0$$

を得る。ただし，ここに $A=[M_X^{(2)}-M_{\bar{X}}^{(2)}M_{\bar{X}}^{(1)-1}M_X^{(1)}]$，$B=[M_U^{(2)}-M_{\bar{X}}^{(2)}M_{\bar{X}}^{(1)-1}M_U^{(1)}]$，$C=[M_W^{(2)}-M_{\bar{X}}^{(2)}M_{\bar{X}}^{(1)-1}M_W^{(1)}]$ とする。(7)をプレストンは静学的誘導型（static reduced form）とよんでいる（[11] p. 66）。[2]

さて，独立な目標数と手段数をそれぞれ n, k とする。つまりプレストンのいわゆる目標係数行列（target coefficient matrix）としての A, 手段係数行列（instrument coefficient matrix）である B について（[11] p. 66）

(8)　$\gamma(A)=n, \quad \gamma(B)=k$

を仮定する。[3] そのときプレストンが静学的可制御定理（static controllability theorem）と別称するティンバーゲン定理は

(9)　システム(7)(8)がすべての $X=X^*$ に対して静学的可制御であるための必要・十分条件は手段係数行列 B が n 次正則であることである

と表現される（[11] p. 66）。すなわち，n 次行列 B について

(10)　$\gamma(B)=n$

が成りたち，したがって目標数＝手段数となるとき，政策当局が定める任意の達成目標 $X=X^*$ に対してそれを実現することのできる手段ベクトル U^* を求めるモデル，すなわち静学的固定目標モデル（static fixed-target model, [11] p. 67）は(7)で $X=X^*$ とおいた

(11)　$-BU=[AX^*+CW]$

であり，これより $U^*=-B^{-1}[AX^*+CW]$ が一意的に決定されるのである。[4]

（2）明らかに(7)はいわゆる構造型(3)とそれより導かれる誘導型との折衷型の部分システムである。それかあらぬか，プレストンみずから(7)を[12]では構造型とよんでいる（[12] p. 216）。

（3）$\gamma(A)$ は行列の階数を表わす。

（4）$k>n$ のケースは $(k-n)$ 個の余分の手段を与件扱いにして処理する。

Ⅲ 動学的ティンバーゲン定理——短期 (目標点可制御命題)

さて，本稿のテーマたるティンバーゲン定理の動学化は，まずプレストンが動学的手法の定石に則して均衡の動学的安定条件論タイプの分析を提示して口火を切ったわけであるが，本節では連続的微分方程式系であるプレストン・モデルを離散型差分方程式システムに切り換えてその論旨を再構成してみよう。

所与の究極目標 X^*，与件 W に対して(11)から求められる U^* は，明らかに

(12) $AX^*+BU^*+CW=0$

を充たす。したがって (X^*, U^*) は均衡点であり，(12)は均衡定義式である。ここで定石通り経済システム(7)で X だけが X^* から乖離したと想定し，この乖離が生じた期間を初期0と定める。初期の目標変数値を $X(0)$ とすれば，$U=U^*$ は仮定により不変だから，$(X(0), U^*)$ が不均衡点であることは

(13) $AX(0)+BU^*+CW\neq 0$

で表現することができる。なお与件 W は一貫して不変と仮定する。(5) そうすれば，不均衡の度合は(12)と(13)の差をとることにより $A(X(0)-X^*)+B(U^*-U^*)$ とすることができる。

次に，初期におけるこの不均衡に対しては次期の目標 $X(1)$ が究極目標 X^* にもっと接近する (つまり $|X(1)-X^*|\rightarrow 0$) ようにシステムの調整過程が U の制御を通じて始動すると考えることができる。(6) この調整過程そのものは n

(5) 次節では可変である。本節のモデルが短期であることの帰結である。

(6) 本節における安定は，かくて手段不安定 (instrumental instability) 分析のフレームワークにおける概念というべく，手段値を固定して均衡から乖離した内生変数の均衡への自律的収束，つまりゼロ入力応答の収束ではない。[8] 第1章, [13] pp. 163～165を参照。

次正則の調整スピード行列 Γ を定義して

$$X(1)-X^*=\Gamma[A(X(0)-X^*)+B(U(1)-U^*)]$$

と設定することができる。これを一般化するために t 期の X, U 値を $X(t)$, $U(t)$ とし，$x(t)=X(t)-X^*$, $u(t)=U(t)-U^*$, $\Gamma A=a$, $\Gamma B=b$ とおけば，プレストンが動学的不均衡誘導型 (dynamic disequilibrium reduced form, [11] p. 68) とよぶシステムは次のように表わすことができる，

(14) $x(t)=ax(t-1)+bu(t),$[7] $x(0)\neq 0$

一見して明らかなように，これは現代制御理論における離散型定係数線型システムの標準形式にほかならない。$u(t)$ は制御入力ベクトル，$x(t)$ は状態ベクトルないし出力ベクトルに該当する。このようにフレームワークを設定すると，線型システム制御論で確立された諸知識が早速にも利用できるわけであり，果してこの理論のイロハともいうべき離散時間システムの可制御性定理 ([13] p. 165) がプレストンの動学的政策存在問題の解明に文字通りオリジナル形式で利用できることを次に説明しよう。

まず，動学的政策存在問題とは，動学的線型システム(14)で有限の目標到達期限 T をいかように確定しようとも，初期の不均衡 $X(0)\neq X^*$，したがって $x(0)\neq 0$ を均衡化させるような，すなわち $X(T)=X^*$，したがって $x(T)=0$ ならしめるような手段ベクトル $u(t)$ ($t=1,\cdots\cdots,\ T$) の存在いかんということであり，プレストンもいうように従来とも定量政策論で無視されてきた最重要問題である。

さて定係数非同次の1階線型連立差分方程式である(14)の一般解は初等的な

---

(7) システム制御論で状態方程式とよぶものと同型である。なお，システム制御論では $x(t)=ax(t-1)+bu(t-1)$ であるのに対して経済学への応用では(14)が圧倒的に多いとは梶原氏の指摘するところである。

逐次代入方式で簡単に見出すことができる。すなわち,

$$x(1)=ax(0)+bu(1)$$
$$x(2)=ax(1)+bu(2)=a^2x(0)+bu(2)+abu(1)$$
$$x(3)=ax(2)+bu(3)=a^3x(0)+bu(3)+abu(2)+a^2bu(1)$$

等々。したがって,一般項として解

(15) $$x(t)=a^tx(0)+\sum_{\tau=0}^{t-1}a^\tau bu(t-\tau),\quad t=1,\ \cdots\cdots,\ T$$

が得られる。

次に,(15)で $t=T$ とおけば,T は予定した究極目標 X^* への到達期であるから,$X(T)=X^*$,つまり $x(T)=0$ となり,したがって

(16) $$-\sum_{\tau=0}^{T-1}a^\tau bu(T-\tau)=a^Tx(0)$$

を得る。明らかに,(16)は静学的固定目標モデル(11)の動学版であり,プレストンはこれを動学的(安定化の)固定目標モデル(**fixed-target model of dynamic stabilization**, [11] p. 67)とよんでいる。動学的システム(14)は,初期状態がいかに与えられようとも,政策手段 $u(t)$, $(t=1,\ \cdots\cdots,\ T)$ の制御を通じてこの $x(0)$ を所定の目標期 T に所定の目標状態 $x(T)=0$ へ移行させることができるなら,つまり(16)が成立するなら,動学的可制御(**dynamic controllable**, [11] p. 68)というが,これこそはシステム制御論におけるカルマンの可制御性概念(**controllability**)そのものであることを付言しておこう([13] p. 46)。

こうして(14)が動学的可制御であるための必要・十分条件を論じるべき段階にさしかかったのであるが,その厳密な証明論議は専門の標準的テキストにゆだねることとし([13] p. 165, [8] p. 16)ここでは論証のキー・ポイントともいうべき1つの論点にふれよう。すなわち,(16)を書き改めれば,

$$(17)\quad [b,\ ab,\ \cdots\cdots,\ a^{T-1}b]\begin{bmatrix} u(T) \\ u(T-1) \\ \vdots \\ u(1) \end{bmatrix} = -a^{T}x(0)$$

となるが，これは第1期から最終目標期としての第 T 期までのすべての手段ベクトル系列 $(u(1),\ \cdots\cdots,\ u(T))$ を未知数とする連立方程式システムにほかならず，静学モデルが所与の $X=X^{*}$ に対して U を未知数とする連立系であることに正確に対応しており，その動学版であることがわかるのである。

かように(11)と(17)は同一の基本形式を共有しており，したがって(11)について成立したティンバーゲン定理が(17)に対しても何らかの形で成り立つはずである。かくして線型システム制御論では離散時間ケースのシステム可制御命題としてなじみ深い動学的可制御定理 (dynamic controllability theorem, [11] p. 68, [13] p. 165) が得られる，すなわち

(18) 動学的不均衡システム(14)が動学的可制御であるための必要・十分条件は $(n,\ Tk)$ 行列

$$(19)\quad Q=[b,\ ab,\ \cdots\cdots,\ a^{T-1}b]$$

が次の条件を充たすことである，すなわち

$$(20)\quad \gamma(Q)=n$$

Q は目標にかかる係数行列としての a または A と政策手段にかかるそれ b または B とから構成されている。A は，既述のように，モデル(7)が内生変数 X に関する完全体系であるとの前提に基いて n 次正則であるが，行列 B は手段 U が内生変数ではないから n 次正則とは限らず，一般に $\gamma(b)=\gamma(B)\leqq n$ であり，したがって $\gamma(b)=\gamma(B)=n$ と $\gamma(b)=\gamma(B)<n$ の2ケースを区別することができる。いずれのケースでも命題(18)が成り立つのだか

ら，動学的存在条件は(20)であるが，意味内容は両ケースで決定的に相違することになる。ケース別に考察しよう。

1．$\gamma(b)=n$ のケース

断るまでもなく(18)は静学命題(9)の動学版であるが，両者の論理的関連はそのような形式的相似性にとどまらず，実質的にも密接極まりないというべきである。すなわち，静学条件(10)，つまり $\gamma(B)=n$ が成立したとすれば，静学システム(11)はいうに及ばず，動学モデル(17)も可制御となるのである。目標係数行列 A と，この場合は手段係数行列 B，および調整速度行列 Γ はともに n 次正則であるから，a と b もそうであり，そしてこのような a，b の冪を小行列とする Q の階数は n となる。かくして次を得る，

(21) 静学システム(7)が静学的可制御なら，動学システム(14)は動学的可制御である。

(17)において B，したがって b が n 次正則という静学条件は b を構成する n 個の列ベクトルを基底として n 次元空間を，ゆえにそのメンバーである $-a^T x(0)$ を張ることができることを意味する。換言すれば，(17)で b にかかるのは $u(T)$ であるから，第1期から第 T 期にわたる各期の政策手段を

$$\begin{cases} u(T) = -b^{-1}a^T x(0) \\ u(T-1) = u(T-2) = \cdots\cdots = u(1) = 0 \end{cases}$$

となるように制御すれば目標に到達できる。$x=X-X^*$，$u=U-U^*$ であるから，1期間——第 T 期——だけ政策手段 $U(T)$ をその最適水準 U^* から $-b^{-1}a^T x(0)$ だけ外して設定しさえすれば，他のすべての期間は U を U^* に等置しても初期の最適からのずれ $x(0)=X(0)-X^*$ を過不足なく解消することができるというわけである。

また，同じく(17)において $u(T-1)$ にかかる行列 ba も n 次正則であるから，

$$\begin{cases} u(T-1) = -b^{-1}a^{T-1}x(0) \\ u(T) = u(T-2) = \cdots\cdots = u(1) = 0 \end{cases}$$

と各期の政策手段を制御することによって目標に到達できるが，その時期は目標の第 T 期よりも1期早まって第 $(T-1)$ 期になることがわかる。……以上を一般化して，手段制御

$$\cdot (22) \quad \begin{cases} u(\tau) = -b^{-1}a^{\tau}x(0) \quad (\tau = 1, \cdots\cdots, T) \\ u(t) = 0 \quad (t \neq \tau) \end{cases}$$

は第 τ 期にまず X をその均衡水準 X^* に復帰させ，以後は T 期まで均衡 (X^*, U^*) を持続させるのである。

(22)によれば，$\gamma(b) = n$ なら，制御対象期限内のいかなる時期であれ，そのうちの単一期間における手段調整 $(u \neq 0)$ だけで経済システムの均衡回復が可能であることになるが，そうするとシステムの線型性から，初期の不均衡 $x(0)$ を T 個以内の任意個数の複数期間にわたり分担して解消できることにもなる。たとえば，第 s 期と第 t 期 $(s < t)$ の2期にわたって不均衡 $x(0)$ をゼロにするのに，まず s 期には $\alpha x(0)(0 < \alpha < 1)$ を縮減するのに手段調整を $u(s) = -\alpha b^{-1}a^{s}x(0)$ とし，t 期に残りの $(1-\alpha)x(0)$ を $u(t) = -(1-\alpha)b^{-1}a^{t}x(0)$ によって解消するというわけである。(22)を基本解とよぶなら，これはそれら基本解の凸結合としての混合型であり，前者が一種のドラスチック調整であるのに対して後者は段階的微調整方式ということもできよう。[8]

以上がすべてではなく，さらに可能性が残されている。初期の不均衡 $x(0) \neq 0$ を解消するのに，これまでのように各期の手段ベクトル $u(\cdot)$ のすべての成分を必ずまとめて同時に調整変化させる必要はさらさらない。たとえば，第1期には第1手段，つまり $u(1)$ の第1成分 $u_1(1)$，第2期には第2手段

(8) (22)は線型計画におけるシンプレックス解と比較することができよう。

$u_2(2)$, ……を第 T 期における経済システムの均衡化の達成のために調整変化させるという制御方式も可能である。(17)を用いていえば，それは $u(1)$ にかかる行列 $a^{T-1}b$ の第1列，$u(2)$ にかかる $a^{T-2}b$ の第2列，……と合計 n 個の1次独立なベクトルを nT 個の列から成る(19)の Q のなかから選び出し，これらをベーシスに初期不均衡ベクトル $-a^Tx(0)$ を張ることを意味する。この可能性は，個別手段がシステム調整にかり出される時間帯が T 個の期間にわたって，ある種の時間割表のように分布しており，くさび型調整方式ということもできよう。さらに，このタイプの調整についても基本型の凸結合方式として混合型を考えることができる。

以上を次のように要約することができよう。

①初期における経済システムの均衡からの乖離 $x(0)$ を T 期間内に解消して再び均衡を回復するために n 個の政策手段を用いるベーシックな制御方法は(19)の Q を構成する nT 個のベクトルから n 個を取り出す組み合わせの数だけ最大限あり，さらにこれらベーシックなものの任意の凸結合も可能な方法であるから，経済システムの動学的制御方法は多数存在する。

②(22)において $\tau=1$ とおけば，

$$(23)\quad \begin{cases} u(1)=-b^{-1}ax(0) \\ u(2)=u(3)=\cdots\cdots=u(T)=0 \end{cases}$$

となるが，定義 $b=\Gamma B$, $a=\Gamma A$, $x(0)=X(0)-X^*$, を想起するならば，(23)の第1式は

$$(24)\quad A(X(0)-X^*)+B(U(1)-U^*)=0$$

となることがわかる。したがって(24)は(23)が，初期において $X(0)$ が X^* から乖離する形で均衡条件(12)が破られたとき，その直後の第1期にこれを丁度補償するように政策手段 $U(1)$ をその均衡値 U^* から，X とは逆方向に乖離させることによって均衡を回復させるというドラスチックな制御方法にほか

ならないことを示す。それは均衡回復の目標期を第 T 期に設定しているにもかかわらず，第1期に実現させてしまうという意味では最もドラスチックといえよう。

こうしてディンバーゲン条件(10)，ゆえに $\gamma(b)=n$ が成立することは極めて恵まれた制御可能性の存在を意味する。しかし「これまでは，すべての政策手段がゼロの費用で望ましいだけ調整されうると仮定してきた。実際にそうかもしれないし，そうでないかもしれない。貨幣供給のようないくつかの政策手段は，相対的に少ない費用で調整されるだろう。税率や政府支出の水準のような他の政策手段は，それほど自由には適合されない。典型的には，どの時点においても，小さな範囲内で，しかも適当な法律が制定された後でしか，その調整はされ得ない。手段が変化することのできる率に対するこうした制約は，しばしば大まかに『調整費用』と呼ばれるものである」([14]p. 379)。したがって制御方法が，上記したように，nT から n をとり出す組み合わせの数だけあったとしても，調整費用が異常高の方法は可能性から除く必要があるし，方法ごとに異なる調整費用の大きさと目標実現期の遅速とのトレード・オフによってベストな制御方法が選ばれることになる。(23)はおそらく高きに過ぎて用いられることはないだろう。

2．$\gamma(b)<n$ のケース

$\gamma(b)=n$ か $\gamma(b)=k<n$ かのいかんにかかわらず，経済システム(14)が可制御であり得ることは定理(18)で見た通りである。しからば上記した $\gamma(b)=n$ のケースと当面のケースとはいかに相異するか。

まず，目標係数行列 A ないし a は両ケースで共通であるが，手段係数行列 B ないし b の列数が $n\neq k$ と異なることから，可制御行列 Q の列数が前ケースでは nT であったのに対して当ケースでは kT と相違する。したがって前ケースでは第1～T 期の任意の1期間にすべての手段値を同時にそれらの均衡値 U^* から乖離させて初期に生じた攪乱 $x(0)$ を相殺するように調整す

るという制御の基本的方法(22)が利用可能であったが，当面のケースにあってはベクトル $x(0)$ で表わされた n 個の不均衡を解消するには手段数が $(n-k)$ 個不足するから，単一期間内にすべての局面を均衡化させることは論理的に不可能であり，少なくとも2期間にわたるいわばくさび型の制御方式の採用が必要不可欠である——両ケースの差が最も端的に現出するのはここにおいてである。

いま，$n\leqq 2k$ としよう。すなわち，目標数 n に対する手段不足数が k(手段数) を超えないとすれば，初期の不均衡の解消には2期間にわたる政策手段の調整変化で充分に対処することができよう。たとえば，第 s 期には k 個の全手段 $u_1(s)$, ……, $u_k(s)$ を，そして第 t 期には第1手段から第 $(n-k)$ 手段，すなわち $u_1(t)$, ……, $u_{n-k}(t)$ を稼動することにすれば，$u(s)$ がかかる行列 $a^{T-s}b$ と $u(t)$ の最初の $(n-k)$ 個の成分がかかる行列 $[a^{T-t}b]_{(n-k)}$ とに含まれる合計 n 個の列ベクトルをベーシスにして初期の不均衡関連ベクトル $-a^Tx(0)$ を張ることができるから，制御方法

$$
(25)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} u(s) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n-k}(t) \end{pmatrix} = -[a^{T-s}b, [a^{T-t}b]_{(n-k)}]^{-1} a^T x(0) \\ \text{その他のすべての } u(\cdot)=0 \end{cases}
$$

は初期の不均衡 $x(0)$ を解消して経済システムを均衡化させることができる。第1手段から第 $(n-k)$ 手段までは第 s 期，第 t 期と2度にわたって調整変化 ($u(\cdot)\neq 0$ となること) を強いられる。同じ手段でも期を異にすれば相異なる手段となることがポイントである。手段の効果係数が第 s 期と第 t 期では $a^{T-s}b$, $a^{T-t}b$ と異なるからである。その結果同一手段でもそれがとる第 s 期の調整値と第 t 期の調整値とは異なるはずである。

$n\leqq 3k$ なら，3期にわたる手段調整の必要が生じ，したがって3回も調整作業にかり出される手段が少なくとも1個は出現することだろう。……

しからば，この論法を極限まで進めて，$k=1$ のとき，つまり政策手段が

1個のときでも，これを n 回調整変化に供することにより経済システムに均衡を回復させることが可能だろうか？答は条件付きで可能である。その条件とは，明らかに

(26) $T \geqq n$

である。手段が単一なら，b はベクトルとなるから，(19)の可制御行列 Q は $(n,\ T)$ 行列に退化し，$n > T$ なら，(17)は $u(\cdot)$ にとって過剰決定の矛盾体系となってしまうからである。通常，動学的可制御定理は(18)の T を n で代置した

(18)′ 動学的不均衡システム(14)が動学的可制御であるための必要・十分条件は $(n,\ nk)$ 行列 $Q=[b,\ ab,\ \cdots\cdots,\ a^{n-1}b]$ が条件 $\gamma(Q)=n$ を充たすことである，

とされ，(9) その理由として行列に関するケーリー・ハミルトンの定理の存在があげられることが多いが（たとえば，[14] p. 404），期を異にする同一の政策手段を別個の手段に数える「のべ数」の考え方からしても(18)を(18)′に改めることの妥当性は容認できるのである。

Ⅳ　動学的ティンバーゲン定理——長期（目標径路可制御命題）

前節では，動学的安定分析のフレームワークを用いて，モデルがもともと1階差分系で表現されるケースをとり扱ってきた。しかし，動学モデルが現象間の錯綜した異時的因果関係によって特徴づけられるものである限り，このような1階差分方程式で表現される経済システムは最も単純な特殊ケース

(9) [11] そのもの，および専門テキスト [13] もそうである。

とみなされるべきであり，現実は多かれ少なかれもっと高階の連立システムを用いて接近されるべきであろう。以下ではラグ構造が前節とは比較にならないほど複雑なプレストン & シーパーのモデル [12] の基本構成とそれによる分析内容のさわりの部分を示して，そこに定量的政策モデルと現代制御論とのかかわり方を垣間見てみたい。(10)

まず，プレストン & シーパーの動学的に一般化された政策モデルを提示しよう，

$$(27)\quad A(L)X(t)=B(L)U(t)+C(L)W(t)$$

ここに X, U, W は既述の定義通り目標，手段，与件のベクトルとし，L はラグ・オペレーターであり，$L^vX(t)=X(t-v)$ と定義するから，(27)の係数行列について，$A(L)=\sum_{i=0}^{p}A_iL^i$, $B(L)=\sum_{i=0}^{q}B_iL^i$, $C(L)=\sum_{i=0}^{\gamma}C_iL^i$, と定義することは(27)が目標変数 X に関する p 階連立差分方程式システムであることを意味する。$A(L)X(t)=A_0X(t)+A_1X(t-1)+\cdots\cdots+A_pX(t-p)$ だからである。

前節の構造型(14)が1階差分系であったのに対して(27)はかように p 階システムであり，さらに手段が q 階，与件までが γ 階建てで因果関連してくるのだから，通常の道具立てでは対処のすべもなく，ここに現代システム制御論の登場となるわけである。

さて，それを借用したために動学的経済政策論の独立性が大きく損われた観のある「現代制御論からの借物」([12] p. 218) とは実はモデルの状態空間型 (state space form) にほかならない。すなわち，システム制御論によれば，モデルにおける構造方程式としての任意の高階差分方程式も状態方程式とよばれる「それと同等な1階方程式に簡単に変換できる」([7] p. 115)。このルールを構造型(27)，すなわち

(10) [1] もこれと同型の分析を行なっているが，モデルは連続型である。

$$(27)' \quad A(L)X(t)=[B(L),\ \ C(L)]\begin{bmatrix} U(t) \\ W(t) \end{bmatrix}$$

に適用すれば，それに同値な１階差分系としての状態空間型

$$(28) \quad \begin{cases} Z(t+1)=FZ(t)+GU(t)+EW(t) \\ X(t)=HZ(t)+DU(t)+MW(t) \end{cases}$$

が対応することになる。そして(28)における $Z(t)$ が，システムの内部状態を表現するということで，状態変数（state variable）とよばれているものである。$Z(t)$ は m 次ベクトルになったとする。

構造モデル(27)における L の行列多項式 $A(L)$，$B(L)$，$C(L)$ は(28)では単なる定数行列 F，G，E，H，D，M に変身している。その代りに(27)における n 個の差分方程式がすべて p 階だとすれば，(28)の１階差分方程式数は $m=np$ である。このようにモデルを構造型から状態空間型へ変換することを実現（realization）という。実現は一義的ではない（[２]第２章，[９]第４章）。

ちなみに，前節のモデルは，オリジナルの構造型がすでに１階差分系であったから，生まれながらにして状態空間型であったといえよう。そして，かように構造型＝状態空間型のモデルで事足り得たのは，とり扱う対象が均衡の安定性という短期動学問題であったからにほかならない。対照的に，本節において(27)のような錯綜した構造モデルが導入されたのは，関心が長期にわたる目標制御にあるからである。前節までの固定目標は $X^*(T)$ に対するいわば１点集中型であり，プレストン & シーパーの表現を借りて（[12] p. 221）これを政策当局の目的関数が目標点目的型（target point objective）であるということにすれば，本節のは点目的の点列，すなわち

$$(29) \quad \{X^*(0),\ X^*(1),\ \cdots\cdots,\ X^*(T)\}$$

として規定される目標径路目的型（target path objective）というべく，

すぐれて長期動学的なのである。

径路の長さは目標初期（target path origin）0 と目標終期 T との間の $(T+1)$ 個の期間できまるが，これを目標区間（target interval）という。長期動学的フレームワークにおいて初めて考慮に入れられなければならないのは目標区間に何期先がけて政策アクションを開始するかということであり，これを政策リード（policy lead）という。それを s で表わせば，本節のモデルの政策とは，点列

$$\{U(-s),\ \cdots\cdots,\ U(0),\ \cdots\cdots,\ U(T)\} \tag{30}$$

で規定される政策径路（policy path）のことであり，目標区間に準じて政策区間を $(s+T+1)$ 個の期間と定義することができよう。その両端をなす第 $(-s)$ 期，第 T 期は政策初期（policy origin），政策終期（policy horizon）である。明らかに政策終期は目標終期に等しく，かくて政策区間は目標区間を含む。

さて，以上のように必要な諸概念がそろったからには問題の長期動学的政策の存在いかんを問うことができる。すなわち，政策初期における任意・既知の初期条件および政策区間にわたる任意・既知の与件の作用 $\{W(-s),\ \cdots\cdots,\ W(0),\ \cdots\cdots,\ W(T)\}$ に対して所定の目標区間 T にわたって任意の目標径路 $\{X(0),\ \cdots\cdots,\ X(T)\}$ を発生させ得るような政策径路 $\{U(-s),\ \cdots\cdots,\ U(T)\}$ が存在するか？

いま，(28)の第1グループの両辺に L を乗じて $Z(t)=LFZ(t)+LGU(t)+LEW(t)$ と変えれば，

$$Z(t)=[I-LF]^{-1}[GLU(t)+ELW(t)] \tag{31}$$

を得る。これを(28)の第2グループに代入すれば，

$$X(t)=\{D+H[I-LF]^{-1}GL\}U(t) \tag{32}$$

$$+\{M+H[I-LF]^{-1}EL\}W(t)$$

しかるに，$[I-LF]^{-1}=I+LF+L^2F^2+\cdots\cdots$，であるから，これを(31)(32)に代入すれば

$$(31)' \quad Z(t)=GU(t-1)+FGU(t-2)+F^2GU(t-3)+\cdots\cdots$$
$$+EW(t-1)+FEW(t-2)+F^2EW(t-3)+\cdots\cdots$$

$$(32)' \quad X(t)=DU(t)+HGU(t-1)+HFGU(t-2)$$
$$+HF^2GU(t-3)+\cdots\cdots+MW(t)+HEW(t-1)$$
$$+HFEW(t-2)+HF^2EW(t-3)+\cdots\cdots$$

となる。(32)′において

$$X(t)=DU(t)+HGU(t-1)+MW(t)+HEW(t-1)$$
$$+HF\{GU(t-2)+FGU(t-3)+\cdots\cdots+EW(t-2)$$
$$+FEW(t-3)+\cdots\cdots\}$$

とおけば，｛　｝内は(31)′より $Z(t-1)$ に等しいから，

$$(33) \quad X(t)=DU(t)+HGU(t-1)+MW(t)+HEW(t-1)$$
$$+HFZ(t-1)$$

これは第 $(t-1)$ 期が政策初期であり，目標点 $X(t)$ が政策初期条件 $Z(t-1)$ と政策史 $\{U(t-1),\ U(t)\}$，与件史 $\{W(t-1),\ W(t)\}$ に依存することを示す。政策初期が第 $(t-v)$ 期なら，

$$X(t)=DU(t)+H\{\textstyle\sum_{j=1}^{v} F^{j-1}GU(t-j)\}+MW(t)+$$
$$+H\{\textstyle\sum_{j=1}^{v} F^{j-1}EW(t-j)\}+HF^vZ(t-v)$$

したがって $v=t+s$ とおけば，

$$(34)\quad X(t)=DU(t)+H\{\textstyle\sum_{j=1}^{t+s} F^{j-1}GU(t-j)\}+MW(t)$$
$$+H\{\textstyle\sum_{j=1}^{t+s} F^{j-1}EW(t-j)\}+HF^{t+s}Z(-s)$$

(34)で $t=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ T$ とおいて目標径路の各要素を求めれば，次のような前節の(17)に対応する関係システムを得る，

$$(35)\quad \begin{bmatrix} X(T) \\ \vdots \\ X(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D, & HG, & \cdots\cdots, & HF^{T}G, & \cdots\cdots, & HF^{T+s-1}G \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & D, & HG, & \cdots\cdots\cdots, & HF^{s-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(T) \\ \vdots \\ U(-s) \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} M, & HE, & \cdots\cdots, & HF^{T}E, & \cdots\cdots, & HF^{T+s-1}E \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & M, & HE, & \cdots\cdots\cdots, & HF^{s-1}E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(T) \\ \vdots \\ W(-s) \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} HF^{T+s} \\ \vdots \\ HF^{-s} \end{bmatrix} Z(-s)$$

(35)は政策径路 $\{U(-s),\ \cdots\cdots,\ U(T)\}$ を未知数とする連立方程式であるから，長期動学的ティンバーゲン定理ともいうべき次の命題が得られるのである，すなわち，

(36)　状態方程式が(28)である動学的政策モデル(27)で任意の初期条件 $Z(-s)$ と与件系列 $\{W(-s),\ \cdots\cdots,\ W(T)\}$ に対して経済システムを任意の目標径路 $\{X(0),\ \cdots\cdots,\ X(T)\}$ に到達させることができる政策径路 $\{U(-s),\ \cdots\cdots,\ U(T)\}$ が存在するための必要・十分条件は

$$(37)\quad \gamma\left(\begin{bmatrix} D, & HG, & \cdots\cdots, & HF^{T}G, & \cdots\cdots, & HF^{T+s-1}G \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & D, & HG, & \cdots\cdots, & HF^{s-1}G \end{bmatrix}\right) = n(T+1)$$

である。

(37)は状態方程式の行列で表示されている。状態空間法はモデル操作を容易にするが，結果の経済的意味づけが曖昧になるというコストを伴う。ゆえにプレストン & シーパーは状態方程式とオリジナル・モデルをつねに並べてとり扱い，途中で解釈困難に陥ることのないよう配慮している。実際(37)のオリジナル型も示されているが，ここでは両者の比較論議に立ちいらないで(20)と(37)を比較し，長期モデルがかかわる期間数が短期のそれの $(T+1)$ 倍であることがそこに正確に反映されていることを確認するに止めたい。

V 結　　語

静学システムは，目標数と手段数が一致するなら，制御可能であるのに対して動学システムは単一手段でも，その「のべ数」が目標数に等しければ制御可能となることがある。明らかに，それは動学システムにとって「ティンバーゲンの静学定理がかかわりなしというのではなく，これらの静学的に必要な諸手段のうちの1個だけを動学的に変化させる必要があるという意味である。静学的安定化は目標と手段の適当な固定すべき数値を指定することに，そして動学的安定化はこれらの数値への適当な調整径路を指定することに，それぞれかかわるのである」([11] p. 70)。

いうなれば，静学的ティンバーゲン定理によると，「構造モデルというショットガンを設計し，政策的外生変数という弾丸をこめてドンと撃つ」([5] p. 171) にしても，一石二鳥が可能なのは2羽のターゲットが前後一列に並ぶ (目標の1次従属) 例外的ケースだけであって，離れた2羽 (目標が1次独立) を同時に撃つには両手に1挺ずつショットガンが必要である。しかし，同時ではなく多数回にわたって射撃が可能 (動学) なら，1挺のショットガンを動学的に操作して各回に1羽ずつターゲットを撃つことが可能である。この比喩にして正鵠を射ているとすれば，システム制御論からの借り物は難解な定理に含まれた明解な常識の発掘に与って力があったといわねばならない。

参 考 文 献

[1] Aoki, M., "On a Generalization of Tinbergen's Condition in the Theory of Policy to Dynamic Models", Review of Economic Studies, 42 (1975).

[2] Aoki, M., Optimal Control and System Theory in Dynamic Economic Analysis, North-Holland, 1976.

[3] Culbertson, J. M., Macroeconomic Theory and Stabilization Policy, McGraw-Hill, 1968.

[4] Currie, D., "Macroeconomic Policy Design and Control Theory—a Failed Partnership?", Economic Journal, June (1985).

[5] 藤井　隆，書評：藤本利躬「最適経済政策のモデル」，岡山大学経済学会雑誌，9-3，1978.

[6] 小泉　進・建元正弘，所得分析，岩波書店，1972.

[7] D. G. ルーエンバーガー，動的システム入門〈理論・モデル・応用〉（山田武夫・生天目章訳），ホルトサウンダース，1985.

[8] Murata, Y., Optimal Control Methods for Linear Discrete-Time Economic Systems, Springer-Verlag, 1982.

[9] Myoken, H., Dynamic Structures, Optimal Control and Stabilization in Multivariable Economic Systems, Bunshodo, 1980.

[10] Pitchford, J. D. and Turnovsky, J. S. (eds.), Applications of Control Theory to Economic Analysis, North-Holland, 1976.

[11] Preston, A. J., "A Dynamic Generalization of Tinbergen's Theory of Policy", Review of Economic Studies, 41 (1974).

[12] Preston, A. J. and Sieper, E., "Policy Objectives and Instrumental Requirements for a Dynamic Theory of Policy" ([10] に所収).

[13] 坂和愛幸，線型システム制御論，朝倉書店，1979.

[14] ステファン J. ターノフスキー，マクロ経済分析と安定政策（石井　光，油井雄二訳），マグロウヒル好学社，1980.